BREVE INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA TEMPORAL

Margarita Vázquez Campos
mvazquez@ull.es

RESUMEN

En este articulo, se presentan las principales características de la lógica temporal indeterminista, tanto su motivación como sus aspectos sintácticos y semánticos. También se da una aproximación a los aspectos metateóricos y se comentan otras perspectivas.
PALABRAS CLAVE: lógica temporal, tiempo indeterminista, ramificación temporal, tiempo ockhamista.

ABSTRACT

«Brief Introduction to Temporal Logic». In this paper, I try to describe the motivation and main features of the non-deterministic temporal logic, both syntactically and semantically. I will briefly present the metatheorical aspects of one of these logics and some perspectives.

KEY WORDS: temporal logic, non-deterministic time, branching-time, ockhamist time.

0. ALGUNAS CUESTIONES PREVIAS

Es habitual señalar a los lógicos estoicos como los iniciadores de la lógica temporal y seguir un rastro de problemas que llegan hasta nuestros días', pero no se puede hablar propiamente de lógica temporal hasta los escritos de Arthur Prior a finales de la década de los cincuenta y en los sesenta'.

¿Qué es la lógica temporal? La lógica temporal es una extensión de la lógica clásica' para permitir la formalización de enunciados que incluyan precisiones acerca del momento del tiempo en que han tenido lugar. En lógica clásica de proposiciones dos enunciados como «está lloviendo» y «lloverá» deben ser formalizados o bien como dos proposiciones completamente diferentes o como la misma proposición, la lógica temporal nos permite formalizarla como la misma acción en dos momentos diferentes del tiempo, nos permite discriminar si un hecho tiene lugar en el presente, en el pasado o en el futuro. Para lograr esto se introducirán, a nivel sintáctico, nuevos operadores referidos a los momentos del tiempo y, a nivel semántico, se perderá la funcionalidad de verdad. La lógica temporal es utilizada en filosofía con el objetivo fundamental de analizar y clarificar algunos conceptos clave recurrentes en la historia de la filosofía, la mayor parte de ellos señalados ya por Aristóteles.

REVISTA LAGUNA, 9; Julio 2001, pp. 187-198

Estos temas son, por ejemplo, la causalidad, la necesidad histórica, la identidad a través del tiempo y las nociones de sucesos y acciones.

¿Cómo interpreta el tiempo' la lógica temporal? La lógica temporal no pretende dar una respuesta a las preguntas de ¿qué es el tiempo? o ¿cómo es el tiempo? Es más, se queda al margen de esas cuestiones. No hay una sola lógica temporal, sino que hay muchas lógicas temporales, dependiendo de la concepción del tiempo que nosotros tengamos o que nos interese utilizar en ese momento'. No será igual una lógica temporal que presente una visión del tiempo compatible con la mecánica clásica que otra que lo sea con la cuántica, pero ambas serán igual de legitimas si cumplen con los requisitos formales habituales.

1. SISTEMA MÍNIMO DE LA LÓGICA TEMPORAL

El lenguaje del sistema mínimo[6] de la lógica temporal es el habitual de la lógica clásica de proposiciones, con sus símbolos y sus reglas de formación de fórmulas bien formadas. A esto se añade cuatro operadores monarios (G, H, F y P). G y H se interpretan como, respectivamente, «será siempre en el futuro que» y «ha sido siempre en el pasado que», F como «será alguna vez en el futuro que» y P «fue alguna vez en el pasado que»[7].

Las reglas de deducción en todos los sistemas son *Modus Ponens* y Generalización de L (cuando aparezca) de H y de G: si _α, entonces _$L\alpha$, _$H\alpha$ y _$G\alpha$.

Ax0. Todas las tautologías de la lógica clásica de proposiciones
Ax1. $G(A \to B) \to (GA \to GB)$
Ax2. $H(A \to B) \to (HA \to HB)$
Ax3. $A \to HFA$
Ax4. $A \to GPA$
Ax5. $FFA \to FA$ (transitividad)

[1] Cf. P ∅hrstr∅m y P Hasle, *Temporal Logic. From Ancient Ideas to Artificial Intelligence.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995. También, en este mismo volumen de *Laguna,* el artículo de Manuel González Riquelme.

[2] Cf. A. Prior, *Time and Modality.* Oxford, Oxford University Pres, 1957. A. Prior, *Past, Present and Future.* Oxford, Oxford University Press, 1967. A. Prior, *Papers on Time and Tense.* Oxford, Oxford University Press, 1968.

[3] Tanto de la lógica clásica de proposiciones como de la de predicados. Aquí nos centraremos solamente en la de proposiciones.

[4] Cuando hablamos aquí de tiempo, nos referimos a él como soporte de los acontecimientos. No se habla del tiempo en sí mismo.

[5] Podemos utilizar una lógica temporal con criterios pragmáticos, por ejemplo en informática, que no tenga nada que ver con nuestra propia concepción o percepción del tiempo.

[6] Un manual clásico y sencillo, aunque ya bastante anticuado, sobre lógica temporal es R. McArthur, *Tense Logic.* Dordrecht, Reidel Publishing Company.

[7] $G =_{df} \neg F \neg A$ y $H =_{df} \neg P \neg A$

Ax6. $PPA \rightarrow PA$	(transitividad)
Ax7. $PFA \rightarrow (PA \vee A \vee FA)$	(linealidad hacia delante)
Ax8. $FPA \rightarrow (PA \vee A \vee FA)$	(linealidad hacia atrás)
Ax9. $GA \rightarrow FA$	(futuro infinito)
Ax10. $HA \rightarrow PA$	(pasado infinito)
Ax11. $FA \rightarrow FFA$	(densidad)

Los axiomas 0, 1, 2, 3 y 4 constituyen un sistema mínimo. Este se denomina Kt y fue desarrollado por Lemmon en 1965. Añadiendo al sistema mínimo los axiomas 5 y 6 se obtienen modelos transitivos. Si, además, se le añaden los axiomas 7 y 8 se obtiene un sistema para el tiempo lineal. A cualquiera de estos sistemas añadiéndoles los axiomas 9 y 10 se obtiene un sistema de tiempo infinito, y con el axioma 11 un sistema para el tiempo denso.

Definimos un modelo de la lógica temporal como una estructura (T, <, v), a partir de un marco (T, <), donde

1) $T \neq \varnothing$ es un conjunto de momentos del tiempo.
2) $< \subseteq T^2$ es la relación de interioridad, o relación antes / después, y tiene las propiedades que correspondan a cada sistema', siendo en todo caso irreflexiva.
   i) Transitividad: $\forall t,s,r \in T((t < s \wedge s < r) \rightarrow (t < r))$
   ii) Linealidad hacia delante: $\forall t,s,r \in T ((s<t \wedge s<r) \rightarrow (t<r \vee t=r \vee r<t))$
   iii) Linealidad hacia atrás: $\forall t,s,r \in T ((t<s \wedge r<s) \rightarrow (t<r \vee t=r \vee r<t))$
   iv) infinitud en el futuro: $\forall t \exists s (t<s)$
   v) infinitud en el pasado: $\forall t \exists s (s<t)$
   vi) densidad: $\forall t,s \exists r (t<s \rightarrow (t<r \vee r<s))$
3) v es una función de evaluación que asigna el valor verdadero o falso a cada fórmula bien formada (fbf) en un momento (siendo F en conjunto de fbfs, v: $FXT \rightarrow \{1,0\}$. A partir de aquí se pueden obtener los subconjuntos de momentos $V(q) \subseteq T$ en los que una fórmula atómica es verdadera. La función de evaluación cumple las siguientes condiciones, para cualesquiera $t \in T$, $A,B \in F$ y variable proposicional q:
   i) $v(q,t)=1$ o $v(q,t)=0$
   ii) $v(\neg A,t)=1$ si y sólo si $v(A,t)=0$
   iii) $v(A \rightarrow B,t)=1$ si y sólo si $v(A,t)=0$ o $v(B,t)=1$
   iv) $v(FA,t)=1$ si y sólo si $\exists s \in ET (t<s \wedge v(A,s)=1)$
   v) $v(PA,t)=1$ si y sólo si $\exists s \in ET (s<t \wedge v(A,s)=1)$

Para mostrar la validez de una fórmula en estos sistemas, se puede utilizar un método de diagramas semánticos similar al utilizado para la lógica modal por Hughes y Cresswell en 1968[9]. Este método es una extensión de la prueba de reducción para la validez de la lógica clásica de

---

[8] Según el tipo de tiempo de que se trate (línea(, infinito, denso, ...).
[9] G.E. Hughes y M.J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*. Methuen and Co., 1968.

Proposiciones[10] y pretende encontrar un modelo que haga falsa la fórmula. Si tal modelo no existe, la fórmula es válida[11]. Se utilizarán tres tipos de reglas para la construcción de los diagramas:

- Reglas para poner signos
    - Se pone un signo + encima de cada G que tiene un 1 y encima de cada F que tiene un 0. Se pone un signo + debajo de cada G que tiene un 0 y de cada F que tiene un 1.
    - Se pone un signo - encima de cada H que tiene un 1 y encima de cada P que tiene un 0. Se pone un signo - debajo de cada H que tiene un 0 y de cada P que tiene un 1.
- Reglas para crear un nuevo momento
    - Si en un momento aparece una fórmula GA con un signo + debajo, entonces hay que crear un momento posterior a ese donde A reciba el valor 0. Si aparece FA con un signo + debajo, hay que crear un momento posterior donde A reciba el valor 1.
    - Si en un momento aparece una fórmula HA con un signo - debajo, entonces hay que crear un momento anterior a ese donde A reciba el valor 0. Si aparece PA con un signo - debajo, hay que crear un momento anterior donde A reciba el valor 1.
- Reglas para llevar a otros momentos[12]
    - Si en un momento aparece la fórmula GA con un signo + encima, entonces hay que asignarle el valor 1 a A en todos los momentos posteriores. Si FA tiene un signo + encima, se asigna 0 a A en todos los posteriores.
    - Si en un momento aparece la fórmula HA con un signo - encima, entonces hay que asignarle el valor 1 a A en todos los momentos anteriores. Si PA tiene un signo - encima, se asigna 0 a A en todos los anteriores.

---

[10] Se supone que hay alguna asignación que hace la fórmula falsa (v(A)=0) y, a partir de ahí, se asignan el resto de valores a los operadores y variables proposicionales, siguiendo las funciones de evaluación de la lógica clásica de proposiciones. En el caso de la lógica temporal, se asignará el valor 0 en el momento actual ($v(A,t_0)=0$) y se seguirán asignando valores mientras no nos encontremos con un operador temporal que nos impida seguir con la evaluación.

[11] Tal modelo no existe si encontramos una inconsistencia en la asignación de valores, es decir si una subfórmula B de A recibe a la vez v(B)=0 y v(B)=1.

[12] La existencia de otros momentos anteriores o posteriores viene dada, además de los momentos que se creen con las reglas específicas para ello, por las propiedades del tipo de tiempo de que se trate, según las propiedades enunciadas al definir la relación de ulterioridad. Por ejemplo, si el tiempo es infinito siempre habrá un momento anterior (o posterior) a donde llevar el valor, o si el tiempo es denso entre dos momentos siempre habrá un tercero.

¿Qué entendemos cuando hablamos de tiempo indeterminista? No nos referimos a que el tiempo en si sea indeterminista, sino a que el suceder de los acontecimientos en el tiempo parecen suceder de manera indeterminista, o, como se suele decir habitualmente, el futuro esté indeterminado. En esta concepción del tiempo se da una asimetría entre el futuro y el pasado. Mientras los sucesos pasados no se pueden cambiar, lo que ya ha sucedido es inmodificable, el futuro está abierto y lleno de posibilidades.

El desarrollo de las lógicas del tiempo indeterminista es bastante reciente y se ha intensificado especialmente en estos últimos años, debido en parte a la utilidad de las mismas en el campo de la informática, por lo que muchos de los desarrollos son provisionales y algunos, como es el caso de alguna axiomatización, permanecen todavía como problemas abierto

Arthur Prior, quien inició fructíferamente varias líneas de trabajo en lógica temporal, es el primero en plantearse la construcción de una lógica del tiempo indeterminista (también llamada lógica de la necesidad histórica). Lo que Prior plantea es la construcción de una lógica que refleje que los sucesos futuros son realmente contingentes, mientras que los hechos pasados, históricos, son ya inevitables y, por tanto, necesarios. La pregunta que surge es: «Una vez que un suceso se convierte en pasado, o presente, ¿hubiese sido verdad afirmar que iba a suceder?» Clásicamente esto se ha entendido de dos maneras, llamadas ockhamista y peirceana. O bien se afirma que los enunciados pasados son necesarios mientras no involucren afirmaciones acerca del futuro (interpretación ockhamista), o bien se dice que el que un suceso se de en el presente no implica que fuese verdad en el pasado que éste iba a suceder (interpretación peirceana). Mientras que para la primera interpretación basta que un suceso acontezca en el futuro para afirmar que fue verdadera la afirmación de que iba a suceder, para la segunda interpretación sólo se puede hablar de la verdad de un enunciado acerca del futuro si éste es inevitable.

Si nos imaginamos el pasado como una línea recta y el presente como un punto a partir del cuál se abren varias bifurcaciones que representan los futuros posibles, desde la interpretación ockhamista sólo podríamos hablar de la verdad o no de un enunciado acerca del futuro con respecto a, y desde, una de las líneas de la bifurcación. En la interpretación peirceana, en cambio, para hablar de la verdad de un enunciado de futuro, el suceso al que se refiere este enunciado ha de ser verdad en todas las líneas.

Imaginemos una situación: Ayer afirmé que hoy me iba a tocar la lotería y hoy descubro que ha sido así. ¿Era mi afirmación de ayer verdadera? Ockhamistamente, en el contexto de hoy y de mi boleto premiado, sí era verdadera. Desde el punto de vista peirceano, no. Sólo podría ser verdadera la afirmación si yo hubiese comprado todos los boletos, es decir, si el tocarme hoy la lotería hubiese sido un hecho inevitable. Desde un punto de vista formal, la evaluación de las fórmulas se hará teniendo en cuenta dos índices[13], el momento del tiempo y la línea, o historia,

[13] Es una lógica modal de dos dimensiones o bimodal.

en la que se haga la evaluación. En la primera interpretación, una fórmula acerca del futuro será verdadera en una historia y momento si en un momento posterior de esa misma historia, esa fórmula es verdadera. En el caso peirceano, la fórmula acerca del futuro será verdadera en una historia y momento si es verdadera en algún momento posterior de todas las historias que comparten ese mismo punto inicial. Es por ello, que la, referencia, a la historia no les necesaria en esta segunda interpretación, puesto que en un momento dado si afirmamos la verdad de un suceso en el futuro es porque éste sucede en todas, las historias que tienen el mismo inicio.

En un sistema ockhamista, dentro de una historia las evaluaciones de los operadores temporales son semejantes a las de un sistema de tiempo lineal. Es por eso qué para representar las posibilidades en el futuro, se introducen también operadores modales. Así cuando se dice que «es posible en el futuro α» esta fórmula es verdadera en un momento e historia si se da el caso de que en alguna de las historias, la misma en que sé evalúa o cualquier otra, que parten de ese momento, α es verdadera en un momento posterior. De esta manera, en un sistema ockhamista, cuando una fórmula de posibilidad en el futuro es verdadera en un momento, lo es independientemente de la historia en la que ésta se esté evaluando.

En cada punto o momento *t* decimos que α es históricamente necesaria si es verdadera en todas las historias que parte de ese momento.

2.1. AXIOMATIZACIONES DE LA LÓGICA TEMPORAL INDETERMINISTA

Existen distintas versiones de la formalización del tiempo indeterminista ockhamista[14]. En la axiomatización hecha en 1994 por Gabbay, Hodkinson y Reynolds[15], que llamaremos OTp, se toma una axiomatización para la lógica modal S5, una axiomatización para el tiempo lineal (por ejemplo, los doce axiomas citados en el apartado anterior si querernos que el tiempo sea denso e infinito) y varios axiomas específicos del tiempo indeterminista (axiomas 12, 13 y 14). En esta axiomatización, L y M son los habituales en lógica modal («es necesario que» y «es posible que», respectivamente). A las reglas del sistema de tiempo lineal, se le añade la regla de irreflexividad de Gabbay: _$(\neg q \wedge Hq) \rightarrow \alpha$, entonces _$\alpha$.

Ax12. $A \rightarrow LA$, para toda A que no contenga a F. (necesidad histórica)
Ax13. $(\neg q \wedge Hq \wedge LA) \rightarrow GLH((\neg q \wedge Hq) \rightarrow A)$
Ax14. $A \rightarrow GLPMA$

---

[14] Una buena presentación de ésta la encontramos en R. Thomason, «Combinations of tense and modality», en D. Gabbay y E Guenthner (Eds.) *Handbook* of *philosophical logic, Vol. 2,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1984, pp. 135-165.

[15] Cf. D. Gabbay, I. Hodkinson y M. Reynolds, *Temporal Logic. Mathematical Foundations and Computational Aspects. Volume 1.* Oxford, Oxford University Press, 1994.

Otras axiomatizaciones para el tiempo ockhamista son las de Zanardo de 1985 y 1995[16]. La de Zanardo de 1985 no utiliza la regla de irreflexividad.

Burgess en 198[17] y Zanardo en 1990[18] proponen axiomatizaciones para el tiempo indeterminista peirceano. En el caso de Zanardo, esta axiomatización es infinita. En los sistemas de tiempo peirceano, el operador de futuro F es equivalente a LF en un sistema ockhamista, por lo que el operador de necesidad L no aparecerá en la axiomatización (tampoco el de posibilidad M). Además, G y F no serán interdefinibles. Para paliar esta situación se introducirán dos nuevos operadores, f y g ($fA=_{df}\neg G\neg A$ y $gA=_{df}\neg F\neg A$). La axiomatización de Burgess es la siguiente, con las reglas de deducción habituales y la regla de irreflexividad:

Ax0. Todas las tautologías de la lógica clásica de proposiciones
Ax1. $H(A\rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$
Ax2. $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$
Ax3. $G(A\rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB)$
Ax4. $HA \rightarrow PA$
Ax5. $GA \rightarrow FA$
Ax6. $GA \rightarrow gA$
Ax7. $HA \rightarrow HHA$
Ax8. $GA \rightarrow GGA$
Ax9. $FFA \rightarrow FA$
Ax10. $A \rightarrow GPA$
Ax11. $A \rightarrow HfA$
Ax12. $HA \rightarrow (A \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$
Ax13. $HA \rightarrow (A \rightarrow (gA \rightarrow gHA))$
Ax14. $FGA \rightarrow GFA$

2.2. SEMÁNTICA DE LA LÓGICA TEMPORAL INDETERMINISTA

En la semántica del tiempo indeterminista ockhamista, en lugar de representar una sola historia hasta un punto dado, interpretado como el presente, y a partir de ahí iniciar distintas ramas, se pueden representar todas las historias como diferentes y establecer una relación de equivalencia, entre los momentos de tiempo anteriores al actual. Es decir, un mismo momento no aparecerá en dos o más historias diferentes, sino que, en su lugar, aparecerán puntos equivalentes. La intersección entre los momentos de dos historias diferentes será; entonces; vacía. Si consideramos el conjunto de historias $H = \{T_1: i \in J($ (siendo J un conjunto arbitrario),

[16]Cf. A. Zanardo, «A finite axiomatization of the set of strongly valid ockhamist logic» en *journal of Philosophical Logic, 14 (1985), pp. 447-468.*

[17]Cf. J. Burgess, «Decidibility for branching time» en *Studia Logica, 39 (1980), pp. 203-218.*

[18]Cf. A. Zanardo, «Axiomatization of Peircean branching-time logic» en *Studia Logica, 49 (1990), pp. 183-195.*

para cualesquiera $T_1,T_2 \in H$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$), y de dos momentos distintos t y t' que representan el mismo punto diremos $t \approx t'$.
Definimos un modelo ockhamista[19] modelo OTp, como una estructura $(H, T^h, <, \approx ,v)$, a partir de un marco $(H, T', <, \approx)$, donde

1) H es un conjunto de historias,
2) $(T^h, <^h)$ es un orden lineal irreflexivo para cada historia h, donde $h \in H$, 3) $\approx$ es una relación de equivalencia en T, $T= \cup_{h\in H}T^h$ y
4) v es una función de evaluación que asigna el valor verdadero o falso a cada fórmula bien formada (fbf) en un momento e historia (siendo F el conjunto de fbfs, $v: FXT^hXH \rightarrow \{ 1,0\}$). A partir de aquí se pueden obtener los subconjuntos de momentos V(q) ST en los que una fórmula atómica es verdadera. Cuando una fórmula atómica es verdadera en un momento e historia, es verdadera en ese momento independientemente de la historia en la que se evalúe, dado que cada momento pertenece a una sola historia. Así, v(q,)=1 si y sólo si $t \in V(q)$. La función de evaluación cumple las siguientes condiciones, para cualesquiera $t \in T^h$, $h \in H$, $A,B \in F$ y variable proposicional q:

i) v(q,t, h)=1 o v(q, t,h)=0
ii) $v(\neg A,t,h)=1$ si y sólo si v(A,t,h)=0
iii) $v(A \rightarrow B,t,h)=1$ si y sólo si v(A,t,h)=0 o v(B,t,h)=1
iv) v(FA,t,h)=1 si y sólo si $\exists s\in h\ (t<s \wedge v(A,s,h)=1)$
v) v(PA,t,h)=1 si y sólo si $\exists s\in h\ (s<t \wedge v(A,s,h)=1)$
vi) v(MA,t,h)=1 si y sólo si $\exists h'\exists s\in h'(s \approx t \wedge v(A,s,h')=1)$

5) Estos elementos son tales que:
i) Para las historias h_1 y h_2, tales que $h_1 \neq h_2$, $T^{h1}\cap T^{h2}=\emptyset$).
ii) Si $t\neq s$ y $t\in T^h$ y $s\in T^h$, entonces no se da que $t \approx s$.
iii) Si t = t' y $t\in T^h$ y $t'\in T^{h'}$, entonces hay un isomorfismo f entre el conjunto U, $U=\{u\in h: u<_h t\}$, y el conjunto U', $U'=\{u'\in h': u'<_{h'} t'\}$, tal que para todo $u\in U$, $u \approx f(u)$, $f(u)\in U'$.
iv) Si $t\in V(q)$ y t=s, entonces $s\in V(q)$, es decir, si v(q,)=1, $t \approx t'$, $t\in T^h$ y $t'\in T^{h'}$, entonces v(p,t',h')=1.

Una fórmula A es verdadera en el momento t y en la historia h si y sólo si v(A,t,h)=1. También decimos que $(H,T^h,<, \approx,v)$ es un modelo para A. Una fórmula A es válida en la lógica indeterminista ockhamista si y sólo si v(A,t,h)=1 para todo marco $(H,T^h,<, \approx)$, todo momento t y toda historia h.

Si utilizamos el método de los diagramas semánticos para comprobar la validez de una fórmula en un sistema de lógica temporal ockhamista, tendríamos que tener en cuenta las historias, no sólo los momentos, y añadir los operadores L y M. Con esto, las reglas quedarían de la siguiente manera:

19 Según la aproximación de Gabbay, Hodkinson y Reynolds, op. cit., pp. 299-303.

- Reglas para poner signos
  - Para el signo + y el signo - igual que en el sistema mínimo. Además, se pone un signo * encima de cada L que tiene un 1 y encima de cada M que tiene un 0. Se pone un signo * debajo de cada L que tiene un 0 y de cada M que tiene un 1.
- Reglas para crear un nuevo momento
  - Si en un momento aparece una fórmula GA con un signo + debajo, entonces hay que crear un momento, en esa misma historia y posterior a ese, donde A reciba el valor 0. Si aparece FA con un signo + debajo, hay que crear un momento posterior en la misma historia donde A reciba el valor 1. - Si en un momento aparece una fórmula HA con un signo - debajo, entonces hay que crear un momento, en esa misma historia y anterior a ese, donde A reciba el valor 0. Si aparece PA con un signo - debajo, hay que crear un momento anterior en la misma historia donde A reciba el valor 1.
  - Si en un momento aparece una fórmula LA con un signo * debajo, entonces hay que crear una historia con un momento equivalente a ese y, en dicho momento, A recibe el valor 0. Si aparece MA con un signo * debajo, hay que crear una historia con un momento equivalente donde A reciba el valor 1[20].
- Reglas para llevar a otros momentos
  - Si en un momento aparece la fórmula GA con un signo + encima, entonces hay que asignarle el valor 1 a A en todos los momentos posteriores de esa misma historia. Si FA tiene un signo + encima, se asigna 0 a A en todos los posteriores de esa historia.
  - Si en un momento aparece la fórmula HA con un signo - encima, entonces hay que asignarle el valor 1 a A en todos los momentos anteriores de esa misma historia. Si PA tiene un signo - encima, se asigna 0 a A en todos los anteriores de esa historia.
  - Si en un momento aparece la fórmula LA con un signo * encima, entonces hay que asignarle el valor 1 a A en todos los momentos equivalentes a ese[21]. Si MA tiene un signo * encima, se asigna 0 a A en todos los momentos equivalentes.

Los marcos de la lógica indeterminista peirceana son conjuntos ordenados $(T,<)$ en los que la relación $<$ es irreflexiva y el conjunto de los predecesores de cualquier elemento de T está linealmente ordenado por $<$. Los marcos se asume que son ilimitados (no hay elemento $<$-mínimo ni $<$-máximo). Dado cualquier momento $t \in T$, una rama-t (r_t) es un subconjunto máximo linealmente ordenado de los sucesores de t, $r_t=\{v: t<v\}$. Dado un marco peirceano, un modelo peirceano $(T,<,v)$ contiene una función de evaluación ($v: FXT \rightarrow \{1,0\}$) que cumple las siguientes condiciones para todo $t \in T$, $A,B \in F$ y variable proposicional q:

[20] Es importante tener en cuenta, a la hora de obtener inconsistencias, que en los momentos equivalentes las variables proposicionales reciben el mismo valor.

[21] De esa historia o de otra.

1) $v(q,t)=1$ o $v(q,t)=0$
2) $v(\neg A,t)=1$ si y sólo si $v(A,t)=0$
3) $v(A\rightarrow B,t)=1$ si y sólo si $v(A,t)=0$ o $v(B,t)=1$
4) $v(FA,t)=1$ si y sólo si $\forall r_t \exists s \in r\ (t<s \wedge v(A,s)=1)$
5) $v(GA,t)=1$ si y sólo si $\forall s\ (t<s \rightarrow v(A,s)=1)$
6) $v(HA,t)=1$ si y sólo si $\forall s\ (s<t \rightarrow v(A,s)=1)$

Una fórmula A es verdadera en el momento t si y sólo si $v(A,t)=1$. También decimos que $(T<,v)$ es un modelo para A. Una fórmula A es válida en la lógica indeterminista peirceana si y sólo si $v(A,t)=1$ para todo marco $(T,<)$ y todo momento t.

El método de los diagramas semánticos en lógica indeterminista peirceana, introduciría cambios radicales en las asignaciones a los operadores de futuro, especialmente a la F, dado que una F peirceana equivaldría a una LF ockhamista. En cambio, la G y la H funcionarían como en el sistema mínimo, dado que el pasado no existen ramas. Se deja al lector la elaboración de dichas reglas.

2.3. Consistencia y completud de la lógica temporal indeterminista

Para demostrar que el sistema ockhamista es correcto, es decir que «si $\__{OTP}A$, entonces$__{OTP}$ A», habrá que demostrar que cada uno de los axiomas es válido y que las reglas de derivación preservan la validez en este sistema. La demostración de la validez de los axiomas, y de que la mayor parte de las reglas preservan la validez, no presenta mayor dificultad[22] La demostración de que la regla de irreflexividad preserva la validez, la vamos a enunciar por contraposición:

> Si A no es válida en una clase dada de marcos irreflexivos y la variable proposicional q no aparece en A, entonces tampoco la fórmula $(\neg q \cap Hq) \rightarrow A$ es válida en esa clase de marcos.

El antecedente significa que hay un marco M, un momento t, de una historia h, en él y una evaluación v, tal que $v(A,t,h)=0$. Considérese otra evaluación v' que coincide con v para toda variable proposicional distinta de q y tal que $v'(q,t,h)=0$ y, para todo $s\neq t$, $v'(q,s,h)=1$. Puesto que M es irreflexivo, tenemos que $v'(Hq,t,h)=1$ y $v'(\neg q\wedge Hq,t,h)=1$. Por otra parte, $v'(A,t,h)=0$, puesto que v' sólo se diferencia de v en la evaluación de q y esta variable proposicional no aparece en A. Entonces $v'((\neg q\wedge Hq) \rightarrow A,t,h)=0$, que significa que $(\neg q\wedge Hq) \rightarrow A$ no es válida.

Así, quedaría demostrada la corrección del sistema de lógica temporal indeterminista ockhamista que hemos presentado. La consistencia del sistema se sigue de su corrección.

---

[22] Cf. E Salto y J.M. Méndez, «Lógica intuicionista en tres horas (y *pico)»,* en este número de *Laguna.*

Presentamos un esquema[23] de prueba de completud para este sistema[24]. Dicha prueba de completud está basada en la noción de modelo canónico. Se definirá un modelo canónico OTp y se probará que el modelo canónico es una estructura del tiempo indeterminista ockhamista OTp. Asimismo se probará que toda fórmula que no sea demostrable tendrá al menos un modelo (justamente el modelo canónico) que la false, con lo que la completud del sistema de lógica temporal indeterminista ockhamista aquí presentado quedará demostrada.

El modelo canónico OTp es una estructura $(H_c, T^h, <_c, \approx_c, v_c)$, donde

1) H_c es el conjunto de todos los conjuntos de teorías[25] h_α, tales que $h_\alpha = \{ \beta : (\beta = \alpha) \vee (\beta < \alpha)$
$\vee (\alpha < \beta)\}$, para cualesquiera $a, b \in T_c$.
2) T_c es el conjunto de todas las teorías irreflexivas.
3) $\alpha <_c \beta$ si y sólo si $\forall A(GA \in \alpha \rightarrow A \in \beta)$[26] para cualesquiera $\alpha, \beta \in T_c$ y fbf A.
4) $\alpha \approx_c \beta$ si y sólo si $\forall A(LA \in \alpha \rightarrow A \in \beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in T_c$ y fbf A.
5) $v_c(A, \alpha, h_\alpha) = 1$ si y sólo si $A \in \alpha$, para cualesquiera $\alpha \in T_c$, $h_\alpha \in H_c$ y fbf A.

Teorema 0: Sea A una fórmula consistente. Entonces para alguna teoría irreflexiva completa α, $A \in \alpha$. Si α_0 es cualquier teoría consistente tal que un número infinito de proposiciones atómicas q_i no están en α_0, entonces hay una teoría irreflexiva y completa a tal que $\alpha_0 \subseteq \alpha$.

Lema 0.1: Siendo $\Diamond \in \{P, F, M\}$, $\Diamond^*$ definido por $F^* = P$, $P^* = F$ y $M^* = M$ y $\_ = \neg\Diamond\neg$ y $\_^* = \neg\Diamond^*\neg$.
Si para las fbfs x, y, $A_1, \ldots, A_m$, $\_x \rightarrow \__0 (A_1 \rightarrow \__1 (A_2 \rightarrow \ldots \__{m-1}(A_m \rightarrow \__m \neg y))\ldots)$,
entonces $\_y \rightarrow \__m^*(A_m \rightarrow \_^*_{m-1}(A_{m-1} \rightarrow \ldots \_^*_1(B_1 \rightarrow \__m^{*\neg} x))\ldots)$.
Teorema 1: Si no $\__{OT}A$, hay alguna teoría irreflexiva completa α, tal que $A \in \alpha$.
Teorema 2: El modelo canónico $(H_c, T^h, <_c, \approx_c, v_c)$ es un modelo OTp.
Lema 2.1: Para las teorías irreflexivas α, β y γ, si $\alpha \approx_c \beta$ y $\gamma <_c \beta$ entonces no se da que $\alpha \approx_c \gamma$.
Lema 2.2: $<_c$ es un orden lineal[27] y $\approx_c$ una relación de equivalencia.
Lema 2.3:

1. Sea FA en α, donde α es una teoría irreflexiva completa. Entonces para alguna teoría irreflexiva β completa, tal que $\alpha <_c \beta$, $A \in \beta$.

---

[23] Pueden solicitarse a la autora las pruebas completas, en formato ps o pdf, a su dirección de correo electrónico.

[24] Se seguirán fundamentalmente algunas partes de la presentada por D. Gabbay, I. Hodkinson y M. Reynolds, op. cit. También, A. Zanardo, op. cit., 1985.

[25] Se define: Una teoría a es un conjunto de fórmulas bien formadas cerradas por el Modus Ponens. Una teoría a es normal si y sólo si contiene todos los teoremas de OTp. Una teoría normal a es consistente si y sólo si $A \wedge \neg A \notin \alpha$ para toda fbf A, es decir, si no $\alpha \_ A \wedge \neg A$. Una teoría consistente a es completa si y sólo si para cada fbf A, $A \in \alpha$ o $\neg A \in \alpha$. Una teoría consistente a es irreflexiva si y sólo si para $\Diamond \in \{P, M, F\}$ satisface: a) Para algún q, $\neg q \wedge Hq \in \alpha$; b) Siempre que $X = \Diamond_1(A_1 \wedge \Diamond_2(A_2 \wedge \ldots \Diamond_n A_n)\ldots) \in \alpha$, entonces para cualquier fórmula atómica nueva $X_{(q)} = \Diamond_1 (A_1 \wedge \Diamond_2(A_2 Ù \ldots \Diamond_n A_n \wedge \neg q \wedge Hq)\ldots) \in \alpha$.

[26] Y de aquí se puede demostrar $\forall A(HA \in b \rightarrow A \in \alpha)$.

[27] Donde por orden lineal se entiende que: $\alpha <_c \beta$ y $\alpha <_c \gamma$ implica que $((\beta = \gamma) \vee (\gamma <_c \beta) \vee (\beta <_c \gamma))$.

2. Sea PA en α, donde αa es una teoría irreflexiva completa. Entonces para alguna teoría irreflexiva β completa, tal que $\beta <_c \alpha$, $A \in \beta$.

3. Sea MA en α, donde α es una teoría irreflexiva completa. Entonces para alguna teoría irreflexiva β completa, $A \in \beta$ y $\alpha \approx_c \beta$.

Lema 2.4: Sean α, β, γ teorías irreflexivas tales que $\alpha <_c \gamma$ y $\gamma <_c \beta$. Entonces para algún δ, $\delta \approx_c \alpha$ y $\delta <_c \beta$.

Lema 2.5: vc[28] cumple las características propias de la función v en los modelos OTp.

Teorema 3 (Teorema de completud): Si $_{OTP}$A, entonces _$_{OTP}$A.

3. PERSPECTIVAS

La lógica temporal indeterminista se puede extender de distintas maneras. Una de ellas, bastante estudiada, consiste en añadir nuevos operadores referidos a intervalos. Los más habituales son *S (Since) y U (Until).* S(A,B)[29] es verdadera en el momento t si y sólo si hay un momento s tal que s<t en el que A es verdadera y B es verdadera en todo u tal que s<u<t. El operador U[30] se define de manera refleja con S.

Una nueva línea de trabajo es la consistente en estudiar marcos ockhamistas sincronizados. Estos son marcos en los que los puntos de una historia pueden ser comparados con puntos en otras historias. Aquí hay operadores que representan la comparación temporal transhistórica o la simultaneidad transhistórica.

Además, son numerosas las aplicaciones de la lógica temporal en el campo de la informática[31] Algunas de las más destacadas se refieren a la programación lógica temporal (TEMPLOG y Chronolog, por ejemplo), en el sentido en que PROLOG es programación lógica. También hay lógicas temporales computacionales (CTL, CTL*, OCL), lógicas imperativas (METATEM) y lenguajes de consultas temporales. Se pueden estudiar las relaciones de las lógicas temporales con las lógicas de la computación. Las lógicas CTL y CTL* serían las contrapartidas en lógicas arbóreas de la computación de las lógicas del tiempo indeterminista que hemos expuesto aquí, incluyendo los operadores de intervalo y referidas sólo al futuro. En estas lógicas, en lugar de evaluar sobre momentos en historias se evalúa sobre estados en computaciones. Estas lógicas han sido también ampliadas para añadir los operadores de pasado.

---

28 v_c $(A, \alpha, h_\alpha)=1$ si y sólo si $A \in \alpha$, para cualesquiera $\alpha \in T_c$, $h_\alpha \in H_c$ y fbf A.

29 Significa «desde que A, B».

30 Significa «hasta que A, B»

31 Cf. D. Gabbay, C.J. Hogger y J.A. Robinson (Eds.) *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol 4.- Epistemic and Temporal Reasoning.* Oxford, Oxford University Press, 1995. D. Gabbay y H.J.

Ohlbach (Eds.) *Temporal Logic. First International Conference, ICTL94. Bonn, Germany, July 11-14, 1994. Proceedings.* Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 1994